

Teorema Arzelà–Ascoli

arisu hanaputri

MA4031 Fungsi Real
Institut Teknologi Bandung

2026-04-20

Outline

- Motivasi
- Notasi
- Definisi ekuikontinu
- Definisi terbatas total
- Karakterisasi keterbatasan total
- Teorema Arzela Ascoli
- Generalisasi

Motivasi

Tinjau barisan fungsi berikut.

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

Perhatikan bahwa fungsi berikut kontinu di $[0, 1]$ dan konvergen titik demi titik ke fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{jika } x = 1 \end{cases}$$

yang bukan merupakan fungsi kontinu, sehingga barisan tersebut tidak memiliki subbarisan yang konvergen seragam. Jadi, kapan suatu barisan fungsi kontinu pada interval $[a, b]$ bisa memiliki subbarisan yang konvergen seragam?

Notasi

- $B(x, r)$ bola berpusat di x berjari-jari r
- $C[a, b]$ ruang fungsi kontinu $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan metrik uniform

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

- (x_n) barisan bilangan real
- (f_n) barisan fungsi

Ekuikontinuitas

Tinjau fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan koleksi \mathcal{F} berisikan fungsi $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Kontinu

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Kontinu Seragam

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ekuikontinu (Seragam)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Keterbatasan Total

Misalkan (M, d) ruang metrik.

Terbatas

$X \subseteq M$ disebut *terbatas* jika terdapat $x \in X$ dan $r \in \mathbb{R}$ sehingga $X \subseteq B(x, r)$

Terbatas Total

$X \subseteq M$ disebut *terbatas total* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat berhingga titik $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ sehingga $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$

Keterbatasan Total

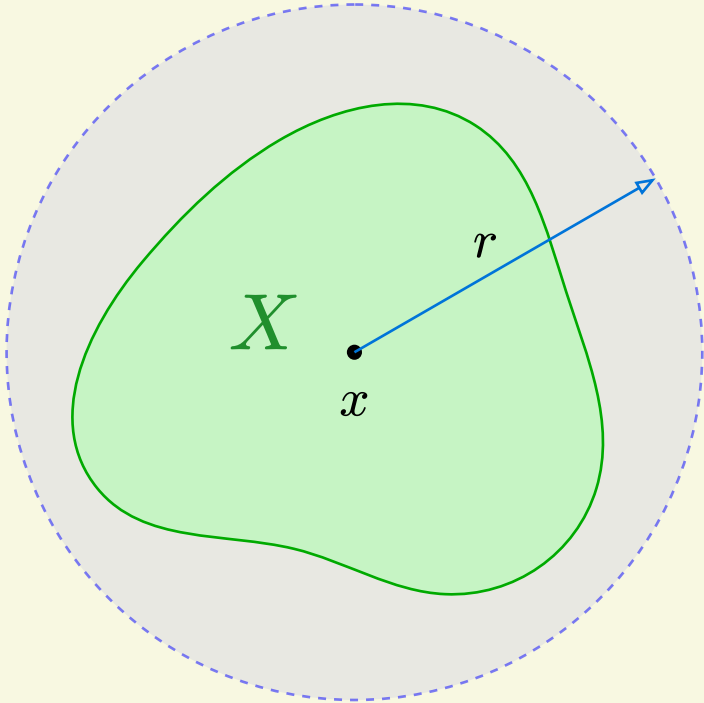
Jala- ε

Misalkan $X \subseteq \overline{\overline{n}} M$ dan $\varepsilon > 0$. Titik-titik berhingga $x_1, \dots, x_n \in M$ disebut *jala- ε* untuk X jika $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$

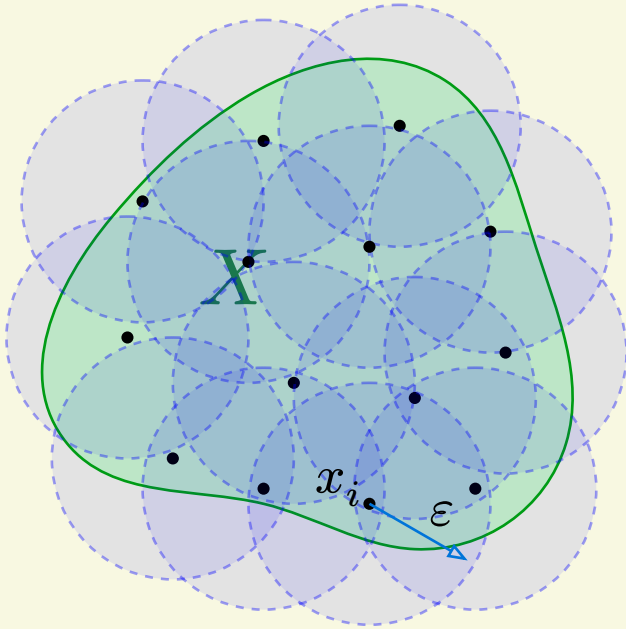
Keterbatasan Total (alt.)

$X \subseteq M$ disebut *terbatas total* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat jala- ε untuk X .

Keterbatasan Total



Gambar 1: Terbatas



Gambar 2: Terbatas Total

Sifat Keterbatasan Total

Teorema (Hierarki Keterbatasan)

Jika $X \subseteq M$ terbatas total, maka X terbatas.



Bukti. Misalkan X terbatas total. Pilih $\varepsilon = 1$, maka terdapat $x_1, \dots, x_n \in M$ sehingga $X \subseteq \bigcup B(x_i, 1)$. Pilih $r = 1 + \max\{d(x_1, x_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Maka, untuk $x \in X$ sebarang, terdapat x_i sehingga $x \in B(x_i, 1)$. Oleh karena itu,

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_1) < r$$

Jadi, $X \subseteq B(x_1, r)$ sehingga X terbatas. □

Konversnya belum tentu berlaku.

Sifat Keterbatasan Total

Keterbatasan Total di \mathbb{R}^n

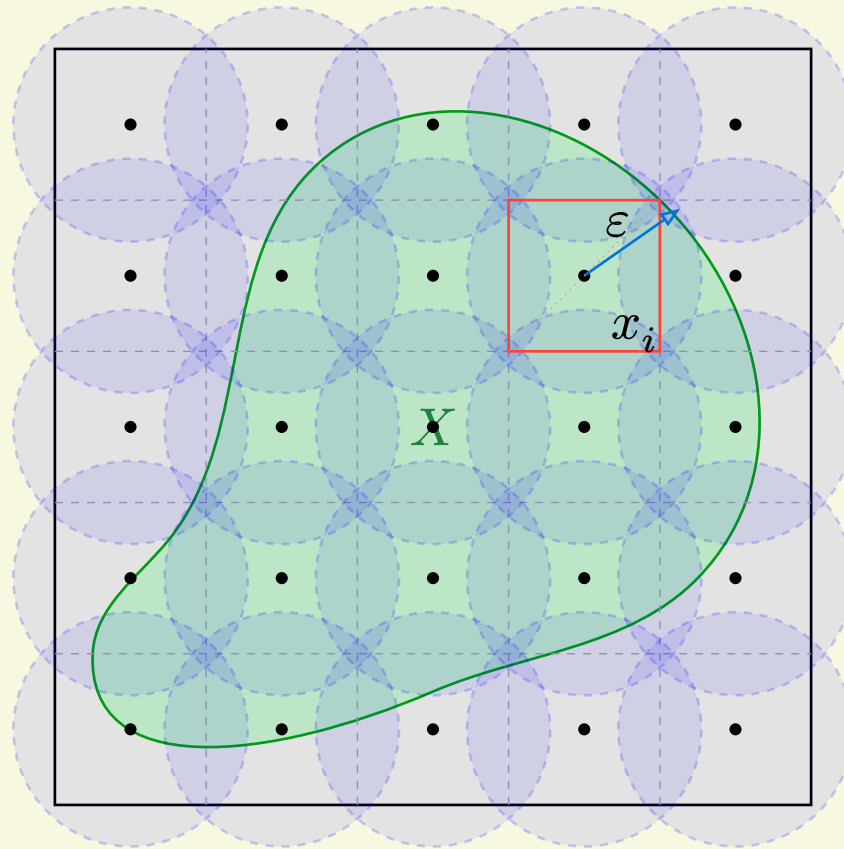
Jika $X \subseteq \mathbb{R}^n$ terbatas, maka X terbatas total.

Bukti. Ambil $\varepsilon > 0$. Karena X terbatas, terdapat $R > 0$ sehingga $X \subseteq B(0, R) \subseteq [-R, R]^n$. Pilih $m \in \mathbb{N}$ sehingga $\sqrt{n} \frac{R}{m} < \varepsilon$. Partisi interval $[-R, R]$ menjadi $2m$ bagian dengan panjang bagian $\frac{R}{m}$. Maka, hiperkubus $[-R, R]^n$ terbagi menjadi $(2m)^n$ hiperkubus kecil dengan diameter $\sqrt{n} \frac{R}{m}$. Maka, jika dipilih $x_1, \dots, x_{(2m)^n}$ dari setiap hiperkubus kecil, berlaku

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{(2m)^n} B(x_i, \varepsilon)$$

sehingga X terbatas total. □

Sifat Keterbatasan Total



Gambar 3: Keterbatasan total di \mathbb{R}^2

Sifat Keterbatasan Total

Teorema (Karakterisasi Keterbatasan Total)

$X \subseteq M$ terbatas total jika dan hanya jika setiap barisan di X memiliki subbarisan yang Cauchy.



Bukti. Jelas untuk X kosong, maka misalkan X takkosong.

(\Leftarrow) Misalkan setiap barisan di X memiliki subbarisan Cauchy. Andaikan X tidak terbatas total. Maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap koleksi berhingga $x_1, \dots, x_n \in M$, terdapat $x \in X$ sehingga $x \in \bigcap_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_0)^c$. Karena X takkosong, pilih $x_1 \in X$. Konstruksi barisan (x_n) secara rekursif sebagai berikut. Misalkan telah dipilih $x_1, \dots, x_k \in X$, maka terdapat x_{k+1} sehingga $x_{k+1} \in \bigcap_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon_0)^c$ yang berarti $d(x_{k+1}, x_i) \geq \varepsilon_0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Sifat Keterbatasan Total

Bukti (lanjut). Dengan konstruksi tersebut, barisan (x_n) yang diperoleh memiliki sifat

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall i < j \quad (*)$$

Dari asumsi, terdapat subbarisan cauchy (x_{n_k}) , sehingga jika dipilih $\varepsilon = \varepsilon_0$, terdapat N sehingga $\forall m < n, d(x_{n_m}, x_{n_j}) < \varepsilon_0$. Kontradiksi dengan (*). Jadi, X haruslah terbatas total.

(\Rightarrow) Misalkan X terbatas total, dan misalkan (x_n) barisan di X . Jika X berhingga, maka haruslah (x_n) memiliki anggota yang berulang sebanyak takberhingga kali, sehingga terdapat subbarisan konstan yang cauchy. Maka, asumsikan X tak berhingga. Karena X terbatas total, maka (x_n) juga.

Konstruksi barisan bersarang dari bola dan subbarisan secara rekursif sebagai berikut. Untuk $\varepsilon = 1$, terdapat $x_1, \dots, x_n \in M$ sehingga $(x_n) \subseteq \bigcup B(x_i, 1)$. Pilih B_1 sebagai bola yang memuat tak hingga banyaknya anggota (x_n) . Dan sebut subbarisan yang terkandung di B_1 sebagai $(x_n^{(1)})$

Sifat Keterbatasan Total

Bukti (lanjut). Kemudian, misalkan telah dipilih B_1, \dots, B_k dan $(x_n^{(1)}), \dots, (x_n^{(k)})$. Dari keterbatasan total $(x_n^{(k)})$, dengan cara serupa dapat dipilih bola B_{k+1} berjari-jari $\frac{1}{k+1}$ yang memuat tak hingga banyaknya anggota dari $(x_n^{(k)})$, dan kita sebut subbarisan yang termuat di B_{k+1} sebagai $(x_n^{(k+1)})$.

Dari konstruksi tersebut kita memiliki rantai bola dan subbarisan sebagai berikut.

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \text{ dan } (x_n^{(1)}) \supseteq (x_n^{(2)}) \supseteq \dots$$

Sekarang, definisikan subbarisan $x_{n_k} := x_k^{(k)}$. Maka untuk $\varepsilon > 0$ dapat dipilih $K > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga untuk $i > j \geq K$ berlaku $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \frac{2}{K} < \varepsilon$ karena x_{n_i} dan x_{n_j} berada di bola B_K yang berdiameter $\frac{2}{K}$. Jadi, terdapat subbarisan (x_{n_k}) yang cauchy. \square

Teorema Arzelà–Ascoli

Teorema (Arzela, 1895; Ascoli, 1884)

Misalkan (f_n) barisan fungsi di $C[a, b]$ yang terbatas dan ekuikontinu, maka terdapat suatu subbarisan (f_{n_k}) yang konvergen seragam ke suatu fungsi f di $C[a, b]$.



Sketsa Bukti.

- Barisan (f_n) terbatas total.
- Dari karakterisasi keterbatasan total, terdapat subbarisan Cauchy (f_{n_k}) .
- Karena $C[a, b]$ lengkap, maka (f_{n_k}) konvergen ke suatu fungsi f di $C[a, b]$
- Terdapat subbarisan (f_{n_k}) yang konvergen seragam ke suatu fungsi f .



Teorema Arzelà–Ascoli

Bukti. Tiga langkah terakhir jelas, sehingga akan dibuktikan langkah pertama.

Misalkan (f_n) barisan fungsi di $C[a, b]$ yang terbatas dan ekuikontinu, dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap f_n dan $x, y \in [a, b]$ berlaku $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$.

Partisi selang $[a, b]$ pada domain oleh $a = x_0 < \dots < x_k = b$ dengan ukuran subinterval lebih kecil dari δ .

Definisikan barisan vektor $v_n = (f_n(x_0), \dots, f_n(x_k))$. Karena (f_n) terbatas, terdapat M sehingga $(v_n) \subseteq [-M, M]^{k+1}$ yang terbatas. Maka, (v_n) terbatas total, dapat dicari jala- $\varepsilon/3$ untuk (v_n) yang titik-titiknya berada di (v_n) . Kemudian, dapat dipilih $g_1, \dots, g_m \in (f_n)$ sehingga untuk setiap f_n terdapat g_j dengan

$$\max_{0 \leq i \leq k} |f_n(x_i) - g_j(x_i)| < \varepsilon/3$$

Teorema Arzelà–Ascoli

Bukti (lanjut). Akan dibuktikan bahwa g_1, \dots, g_m merupakan jala- ε untuk (f_n) . Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [a, b]$.

Maka terdapat fungsi g_j dan x_i titik pada partisi sehingga $|x - x_i| < \delta$. berlaku

$$\begin{aligned} |f_n(x) - g_j(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - g_j(x_i)| + |g_j(x_i) - g_j(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $x \in [a, b]$ sebarang, maka $\|f_n - g_j\| < \varepsilon$, sehingga g_1, \dots, g_m merupakan jala- ε untuk (f_n) , yang berarti (f_n) terbatas total. \square

Generalisasi

Teorema (Fréchet, 1906)

Misalkan X ruang metrik kompak dan (f_n) barisan fungsi di $C(X)$ yang terbatas dan ekuikontinu, maka terdapat subbarisan (f_{n_k}) yang konvergen seragam ke suatu f di $C(X)$



Teorema (Dunford & Schwartz, 1988)

Misalkan X kompak Hausdorff dan (f_n) barisan fungsi di $C(X)$ yang terbatas dan ekuikontinu, maka terdapat subbarisan (f_{n_k}) yang konvergen seragam ke suatu f di $C(X)$



Daftar Pustaka

Arzela, C. (1895). *Sulle funzioni di linee*. Gamberini e Parmeggiani.

Ascoli, G. (1884). *Le curve limite di una varietà data di curve*. Coi tipi del Salviucci.

Dunford, N., & Schwartz, J. T. (1988). *Linear operators, part 1: general theory*. John Wiley & Sons.

Fréchet, M. M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo (1884-1940)*, 22(1), 1–72.

Terima Kasih
